

Probability and Random Processes

ECS 315

Asst. Prof. Dr. Prapun Sukksompong

prapun@siit.tu.ac.th

9 Expectation and Variance



Office Hours:

Check Google Calendar on the course website.

Dr.Prapun's Office:

6th floor of Sirindhralai building,
BKD

Expectation and Variance

- The **expectation** (or **mean** or **expected value**) of a discrete random variable X is given by

$$\mathbb{E}X = \sum_x xp_X(x)$$

- The expected value of a function g of a RV X is given by

$$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_x g(x)p_X(x)$$

- The **variance** of a RV X is given by

$$\text{Var}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)^2] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}X)^2$$

- The **standard deviation** of a RV X is given by

$$\sigma_X = \sqrt{\text{Var}[X]}$$



Expectation

- The **expectation** (or **mean** or **expected value**) of a discrete random variable X is given by

$$\mathbb{E}X = \sum_x xp_X(x)$$



Example

$$\mathcal{S}_X = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$p_X(x) = \begin{cases} 1/2, & x = 1, \\ 1/4, & x = 2, \\ 1/8, & x \in \{3, 4\} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

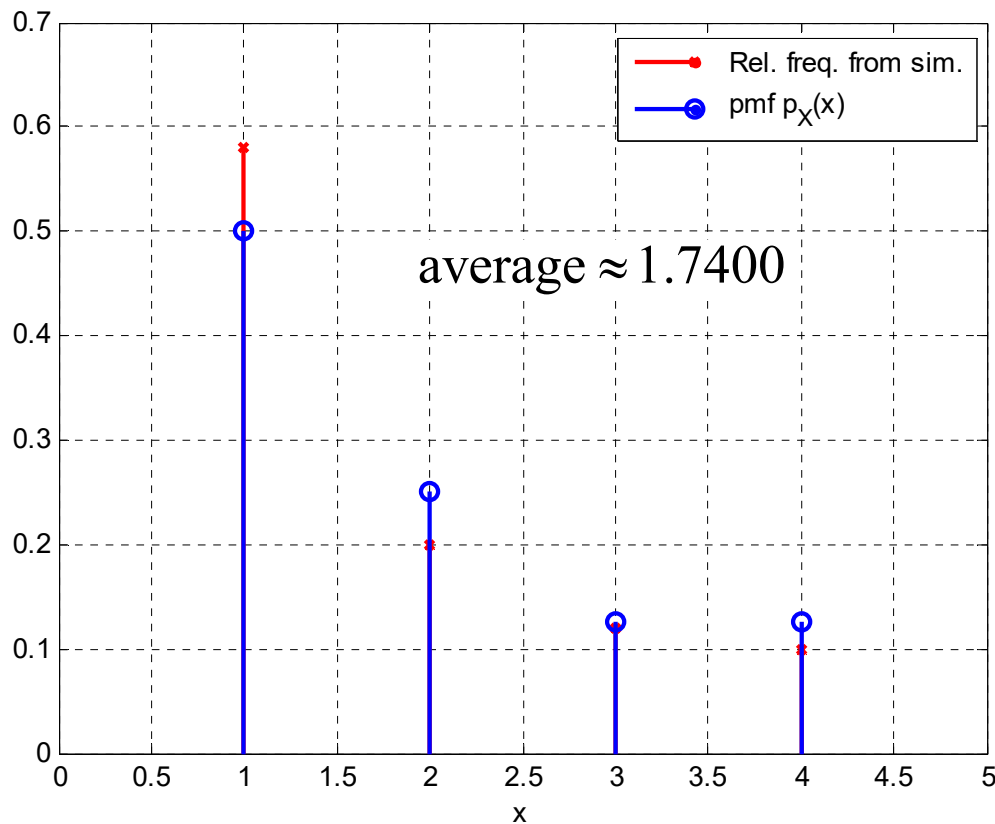
$$\begin{aligned} & \sum_x x p_X(x) \\ &= 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} \\ & \quad + 3 \times \frac{1}{8} + 4 \times \frac{1}{8} \end{aligned}$$

2	1	1	2	1	4	1	1	1	1
1	1	4	1	1	2	4	2	2	1
3	1	1	2	3	2	4	1	2	4
2	1	1	2	1	1	3	3	1	1
1	3	4	1	4	1	1	2	4	1
4	1	4	1	2	2	1	4	2	1
4	1	1	1	1	2	1	4	2	4
2	1	1	1	2	1	2	1	3	2
2	1	1	1	1	1	1	2	3	2
2	1	1	2	1	4	2	1	2	1

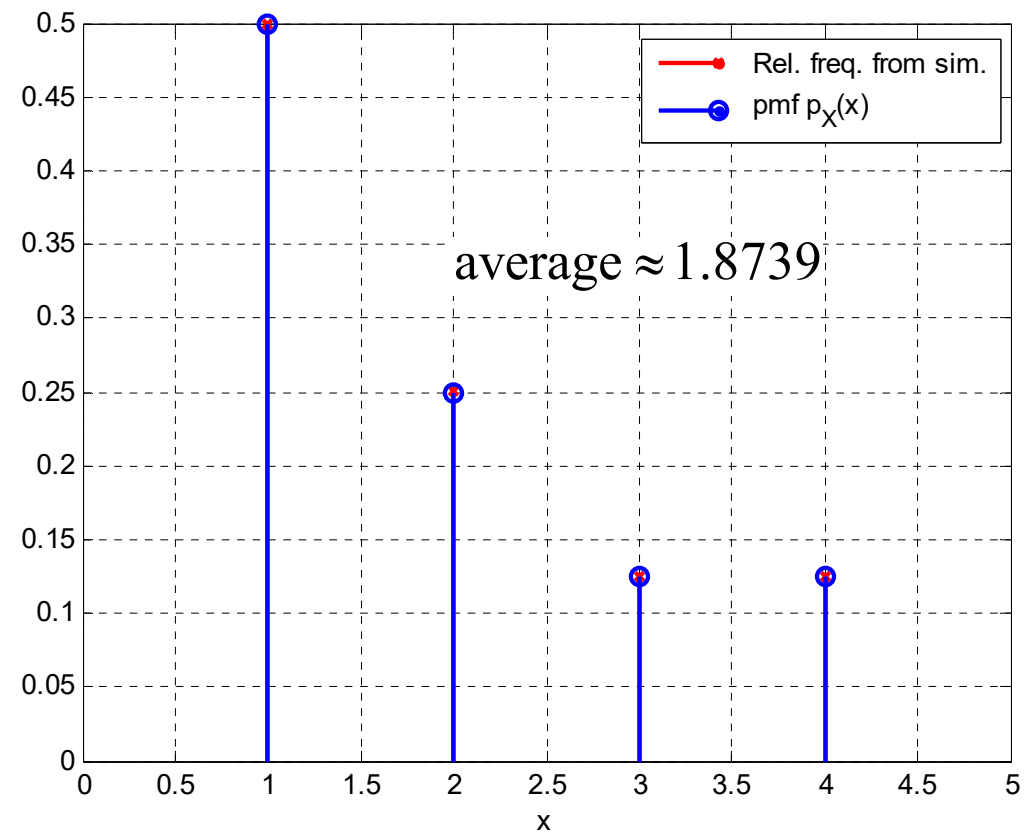


Example

$n = 100$



$n = 10^6$

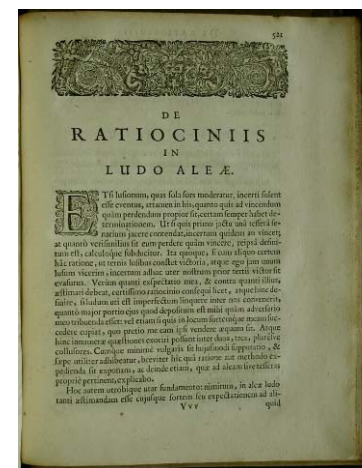


As $n \rightarrow \infty$, the average will converge to $\mathbb{E}X = \frac{15}{8} = 1.875$



Christiaan Huygens (1629-1695)

- Dutch astronomer
- In 1657, wrote the first treatise (textbook) on probability theory: “On Reasoning in Games of Chance”
 - Van Rekeningh in Spelen van Geluck
 - De ratiociniis in ludo aleae
 - <http://www.york.ac.uk/depts/maths/histstat/huygens.htm>
- Interest sparked partly by the work of Pascal and Fermat.
- Originally introduced the concept of **expected value**.

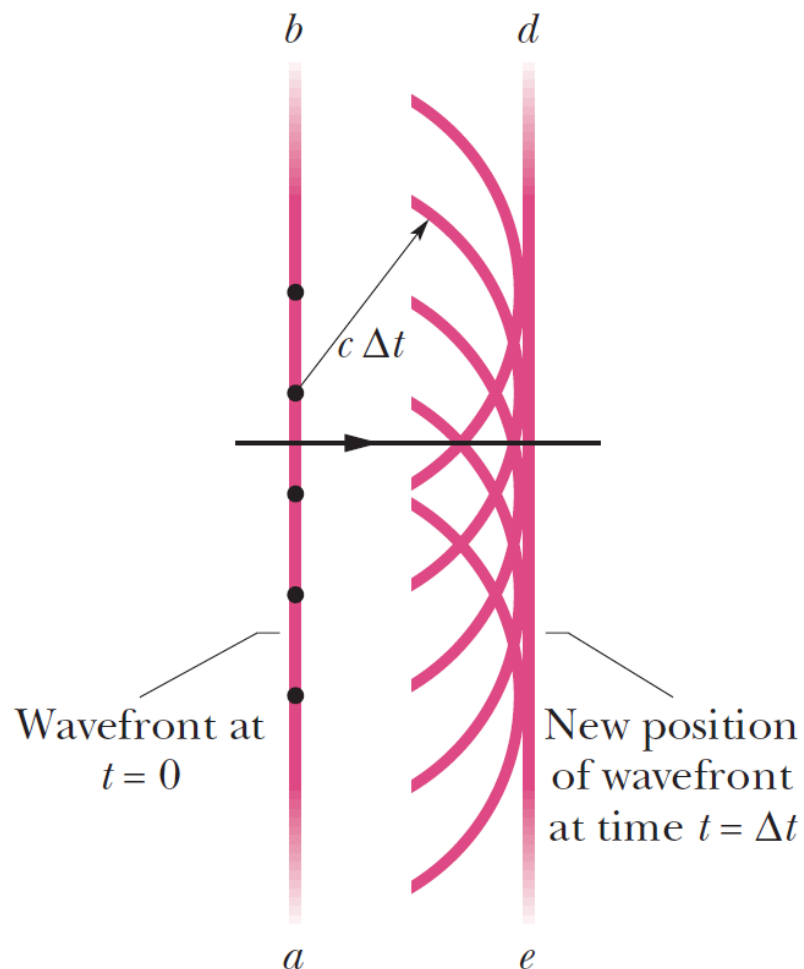


http://en.wikipedia.org/wiki/Christiaan_Huygens#mediaviewer/File:Christiaan_Huygens.jpg
http://bc.uu.leidenuniv.nl/bc/tentoonstelling/Huygens/Images/html/03_2.html

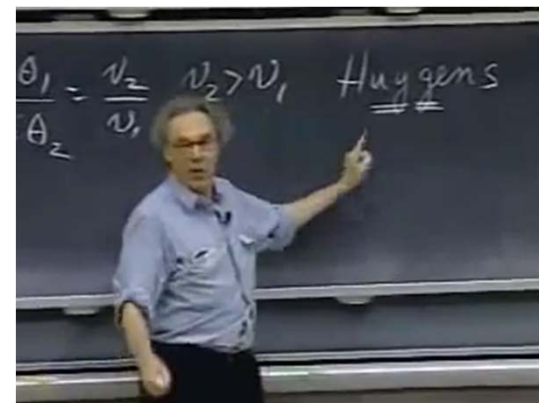


Christiaan Huygens (1629-1695)

- Also famous for the “**Huygens’ Principle**”



All points on a wavefront serve as point sources of spherical secondary wavelets. After a time t , the new position of the wavefront will be that of a surface tangent to these secondary wavelets.



Calculations of Expected Values



sum exp(-alpha) k * alpha^k / k! from k =0 to infinity



Examples Random

Infinite sum:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k \exp(-\alpha) \alpha^k}{k!} = \alpha \quad \mathbb{E}X = \alpha$$

n! is the factorial function »

Poisson(α)

sum k * n!/(k!(n-k)!) * p^k * (1-p)^(n-k) from k =0 to n



Examples Random

Sum:

$$\sum_{k=0}^n \frac{k n! p^k (1-p)^{n-k}}{k! (n-k)!} = n p \quad \mathbb{E}X = n p$$

n! is the factorial function »

Binomial(n,p)



Government Lottery (สลากกินแบ่งรัฐบาล)

https://www.pptvhd36.com/news/ประเด็นร้อน/62583



- ตั้งแต่วันที่ 1 ก.ย. 2560 เป็นต้นไป สำนักงานสลากกินแบ่งรัฐบาล ปรับปรุงรูปแบบสลากฯ ใหม่ จากเดิมฉบับคู่ 80 บาท (ฉบับละ 40 บาท) เป็นรูปแบบใบเดี่ยวฉบับละ 80 บาท
- เงินรางวัลยังเท่าเดิม เปลี่ยนแค่ขนาดที่กระชั้นเล็กลงเท่านั้น



Government Lottery (สลากกินแบ่งรัฐบาล)



สำนักงานสลากกินแบ่งรัฐบาล ช่วยราษฎร์ เสริมรัฐ ยืนหยัดยุติธรรม

ผลการออกรางวัลสลากกินแบ่งรัฐบาล
งวดประจำวันที่ 16 ตุลาคม 2562

ตรวจผลรางวัลทันที หรือตรวจผลรางวัลย้อนหลังได้ที่ โทร. 0 2528 8899 และ 1900 1900 10
ตรวจผลทาง Internet ได้ที่เว็บไซต์ www.glo.or.th และ Application "GLO Lottery" ในระบบ Android และระบบ iOS

รางวัลที่ 1	เลขหน้า 3 ตัว	เลขท้าย 3 ตัว	เลขท้าย 2 ตัว
รางวัลละ 6,000,000 บาท	รางวัลละ 4,000 บาท	รางวัลละ 4,000 บาท	รางวัลละ 2,000 บาท
812564	255 625	132 598	15
รางวัลข้างเคียงรางวัลที่ 1	รางวัลละ 100,000 บาท	รางวัลที่ 2	รางวัลละ 200,000 บาท
8 1 2 5 6 3	8 1 2 5 6 5	010810 389324 422672 685097 872569	
รางวัลที่ 3	รางวัลละ 80,000 บาท		
184912 310103 400722 482422 498877 509278 588913 634449 792849 867144			
รางวัลที่ 4	รางวัลละ 40,000 บาท		
003022 155360 237547 266363 373702 436220 533579 782132 857672 955921 013024 155681 240435 312560 391754 465005 550552 803175 858949 960192 045286 160664 243236 326116 412815 483577 551285 804013 882975 967983 051309 206603 245630 335992 414324 489817 589789 805436 895330 981985 053345 230220 258018 370468 428083 531099 618124 848362 931816 987179			
รางวัลที่ 5	รางวัลละ 20,000 บาท		
003702 081403 195339 298102 344977 455923 543969 633171 760125 881018 006716 085651 206838 303098 365823 466330 547116 637184 772419 888691 025878 085750 259875 306124 371914 475702 549687 668149 778791 890996 028206 117010 260202 308411 382825 480010 558215 673646 798582 899923 030327 133222 260457 308807 398450 484545 566744 682848 831822 904347 033043 139259 265407 311589 409550 486629 568800 687586 836234 917535 039982 151520 266783 322444 431080 513624 575341 708439 844954 931010 045891 160304 268578 326315 434722 527190 578409 716818 849736 958682 050755 163569 279811 333931 454193 533798 585679 717015 855824 969824 051952 174513 282553 344616 455269 538038 586306 755445 873219 989669			

นายพิภพ ปานแย้ม รองนายกเทศมนตรีเทศบาลเมืองคลองหลวง นำล็อตเตอรี่จำนวนมากติดฝาผนังบ้าน
ของตนที่ อ.คลองหลวง จ.ปทุมธานี

“ตอหวย” ปลง นำหวยมากทำ “วอลเปเปอร์บ้าน”



Government Lottery (สลากกินแบ่งรัฐบาล)

เงื่อนไขเงินรางวัลสลากกินแบ่งรัฐบาล

(ใช้ตั้งแต่งวดวันที่ 1 กันยายน 2560 เป็นต้นไป)
 สลาก 1 ชุด มี 1 ล้านฉบับ ฉบับละ 80 บาท
 ถ้าจำหน่ายหมด กำหนดเงินรางวัลต่อชุด ดังนี้



รางวัล	จำนวน	มูลค่า (บาท)
รางวัลที่ หนึ่ง	1 รางวัล	6,000,000
รางวัลที่ สอง	5 รางวัล	200,000
รางวัลที่ สาม	10 รางวัล	80,000
รางวัลที่ สี่	50 รางวัล	40,000
รางวัลที่ ห้า	100 รางวัล	20,000
รางวัลข้างเคียงรางวัลที่หนึ่ง	2 รางวัล	100,000
รางวัลเลขหน้า 3 ตัว เสียง 2 ครั้ง	2,000 รางวัล	4,000
รางวัลเลขท้าย 3 ตัว เสียง 2 ครั้ง	2,000 รางวัล	4,000
รางวัลเลขท้าย 2 ตัว เสียง 1 ครั้ง	10,000 รางวัล	2,000

สลาก 1 ชุด มี 14,168 รางวัล เป็นเงิน 48,000,000 บาท

Expected Profit = -32

- ก. เงินรางวัลจะจ่ายแก่ผู้ถือสลากฉบับที่ถูกรางวัลนำมาขอรับ
- ข. ถ้าสลากจำหน่ายไม่หมด เงินรางวัลหนึ่งๆ ต้องลดลงตามส่วน
- ค. ผู้ถูกรางวัลต้องมาขอรับเงินรางวัลภายใน 2 ปี นับจากวันออกสลาก หากพ้นกำหนดจะนำส่งเป็นรายได้แผ่นดิน
- ง. ผู้ขอรับเงินรางวัลต้องชำระค่าอากรแสตมป์ ในอัตรา 1 บาท ของเงินรางวัล ทุก 200 บาท หรือเศษของ 200 บาท

Can only press once

**INSTANT
\$1 MILLION**



**50% CHANCE OF
\$100 MILLION**



“Similar” Example



ฉันเหมือนคนที่มี**เสือใส่** แต่ยังไม่พอใจกับที่ฉันมี
เพราะแค่เพียงได้**เจอเสือใหม่** อย่างที่ฉันพอใจอยากจะ**ริบคว่ำ**
ใครก็เตือนว่าไม่คุ้มกับสิ่งที่ฉันทิ้งไป เพื่อสิ่งที่ฉันยังไม่ได้มา
ใครก็เตือนอย่าริบร้อนจะ**เสียง**ทำไมนะ แต่มันก็ยังล่ำไปหมดทั้งใจ

ฉันอุตส่าห์**ไม่รักเขา**เพื่อที่จะ**รักเธอ**
ยอมทุ่มเทหมดแล้วให้เธอ แล้วเธอก็ทิ้งไป
เสียเค้าแล้วยังต้อง**เสียใจ**เธอสอนฉันให้เข้าใจ
การลงทุน**เสียงเหลือเกิน**



[Stock Exchange of Thailand]

From the SET's website,...



“ การ **ไม่ลงทุน**
มีความเสี่ยงมากกว่า ”



Computation of $\mathbb{E}[X^2]$



sum exp(-alpha) k^2 * alpha^k / k! from k =0 to infinity



Examples Random

Infinite sum:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2 \exp(-\alpha) \alpha^k}{k!} = \alpha (\alpha + 1)$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \alpha + \alpha^2$$

n! is the factorial function »

Poisson(α)

sum k^2 * n!/(k!(n-k)!) * p^k * (1-p)^(n-k) from k =0 to n



Examples Random

Sum:

$$\sum_{k=0}^n \frac{k^2 n! p^k (1-p)^{n-k}}{k! (n-k)!} = p (n^2 p - n p + n)$$

$$\mathbb{E}[X^2] = np(1-p) + (np)^2$$

n! is the factorial function »

Binomial(n,p)



“Average” deviation from the mean

- Deviation (distance) from the mean: $X - \mathbb{E}X$
- “Average” deviation from the mean
 - Choice #1: $\mathbb{E}[X - \mathbb{E}X] = \mathbb{E}X - \underbrace{\mathbb{E}[\mathbb{E}X]}_{\text{constant}} = \mathbb{E}X - \mathbb{E}X = 0$

- Choice #2: $\mathbb{E}[|X - \mathbb{E}X|]$ ← difficult to calculate or analyze

- Choice #3: $\sigma_X = \sqrt{\text{Var } X} = \sqrt{\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)^2]}$

root mean square of the deviation
(distance) from
the mean

Computation of Var X and σ_X

Binomial(n,p)

sum $k * n! / (k! * (n-k)!) * p^k * (1-p)^{(n-k)}$ from $k = 0$ to n

Examples Random

Sum:

$$\sum_{k=0}^n \frac{k n! p^k (1-p)^{n-k}}{k! (n-k)!} = n p \quad \mathbb{E}X = np$$

$$\text{Var } X = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}X)^2 = np(1-p)$$

sum $k^2 * n! / (k! * (n-k)!) * p^k * (1-p)^{(n-k)}$ from $k = 0$ to n

Examples Random

Sum:

$$\sum_{k=0}^n \frac{k^2 n! p^k (1-p)^{n-k}}{k! (n-k)!} = p(n^2 p - n p + n) \quad \mathbb{E}[X^2] = np(1-p) + (np)^2$$

$n!$ is the factorial function »



Expectation and Variance

- The **expectation** (or **mean** or **expected value**) of a discrete random variable X is given by

$$\mathbb{E}X = \sum_x xp_X(x)$$

- The expected value of a function g of a RV X is given by

$$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_x g(x)p_X(x)$$

- The **variance** of a RV X is given by

$$\text{Var}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)^2] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}X)^2$$

- The **standard deviation** of a RV X is given by

$$\sigma_X = \sqrt{\text{Var}[X]}$$



Properties Expectation and Variance

$$\mathbb{E}[g(X)] \neq g(\mathbb{E}[X])$$

$$\mathbb{E}[aX + b] = a(\mathbb{E}X) + b$$

$$\mathbb{E}[c_1g_1(X) + c_2g_2(X)] = c_1\mathbb{E}[g_1(X)] + c_2\mathbb{E}[g_2(X)]$$

$$\text{Var}[aX + b] = a^2\text{Var}[X]$$

$$\sigma_{aX+b} = |a|\sigma_X$$

$$\text{Var}[c_1g_1(X) + c_2g_2(X)] = c_1^2\text{Var}[g_1(X)] + c_2^2\text{Var}[g_2(X)] + c_1c_2\text{Cov}[g_1(X), g_2(X)]$$



One number to represent a data set

$$\begin{aligned} \text{data} &= [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7] \\ &= [-10, -9, 1, 2, 3, 4, 5] \end{aligned}$$

Find one number
(a) to represent
this data set.

